Theoretische Physik I

Präsenzübung, Blatt 12 **WS 03/04 13./14.01.04**

[P22] Ebene Wellen

Eine ebene Welle sei durch

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\{\vec{E}_0 e^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}\} \qquad \text{und} \qquad \vec{B}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\{\vec{B}_0 e^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}\} \tag{1}$$

mit $\vec{E}_0 = a\vec{e}_x + \mathrm{i}b\vec{e}_y$ und $\vec{B}_0 = -\mathrm{i}b\vec{e}_x + a\vec{e}_y$ gegeben.

(a) Überprüfen Sie die Gültigkeit der Maxwellgleichungen.

(b) Zeigen Sie: Für alle Zeiten t gilt

$$\left(\frac{E_x(\vec{r},t)}{a}\right)^2 + \left(\frac{E_y(\vec{r},t)}{b}\right)^2 = 1 \ . \tag{2}$$

[P23] Bewegte Punktladung

Die Stromdichte einer entlang der Weltlinie $x^\mu(\lambda)$ bewegten Punktladung q ist

$$j^\mu(x) = q \int d\lambda \ \dot{x}^\mu(\lambda) \ \delta^{(4)}(x - x(\lambda)) \ . \tag{3}$$

(a) Zeigen Sie, daß $j^\mu(x)$ invariant unter Umparametrisierung der Weltlinie ist.

(b) Integrieren Sie $j^\mu(x)$ gegen eine beliebige Distribution $f(x)$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

(c) Sei nun $f(x) = \delta(x^0 - t)$ und $x = (t, \vec{x})$, d.h. definieren Sie

$$Q^\mu(t) = \int d^3x \ j^\mu(t, \vec{x}) \ . \tag{4}$$

Zeigen Sie, daß $\dot{Q}^0(t) = 0$.

(d) Ersetzen Sie in (3) den Parameter λ durch t und werten Sie das t-Integral aus. Was ergibt sich für $Q^\mu(t)$?

(e) Ist $Q^\mu(t)$ ein Vierervektor? Falls nein, wie muß $Q^\mu(t)$ modifiziert werden?

(f) Wählen Sie als Beispiel die Kreisbewegung $\vec{x}(t) = a(\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0)$. Berechnen Sie $\vec{v}(t)$, $u^\mu(\tau)$, $j^\mu(x)$ und $Q^\mu(t)$. Worin unterscheiden sich die letzten beiden Größen bei Lorentz-Transformationen?